De Mathematische Slinger in zijn relatie tot Elektrische Trillingskringen.

F. De Bisschop, ON4BIF

1. INLEIDING

De studie van de z.g. Mathematische Slinger kadert in de fysica opleiding als toepassing van de allerbelangrijkste wet, met name deze van behoud van energie : bij fysische/chemische processen treedt mogelijks/algemeen omzetting plaats van een energievorm naar een andere, zoals daar zijn de potentiele, kinetische, chemische, elektrische, thermische energie …, doch zonder enig verlies. energie

Zo is het slingeren/vibreren van voorwerpen een proces waarbij enkel omzetting van kinetische in potentiele energie optreedt, vandaar dat men in dit verband spreekt van behoud van mechanische energie en conservatieve krachten.

Nota: Een andere - evenzeer belangrijke fysische wet - namelijk de tweede hoofdwet van de thermodynamica, leert immers dat energie eenmaal omgezet in warmte, nooit volledig kan worden gerecupereerd met het oog op het leveren van arbeid/energie.

In het geval van slingers is aan het behoud van mechanische energie voldaan voor zover wrijving (in het ophangpunt en met de omgeving) en omzetting van mechanische energie in warmte verwaarloosbaar is.

Het slingeren van een bolvormige massa (een z.g. kogel) opgehangen door middel van een massaloze draad aan een wrijvingsloos ophangpunt en in een wrijvingsloos medium (Fig. 1) geldt in dit verband als voorbeeld.

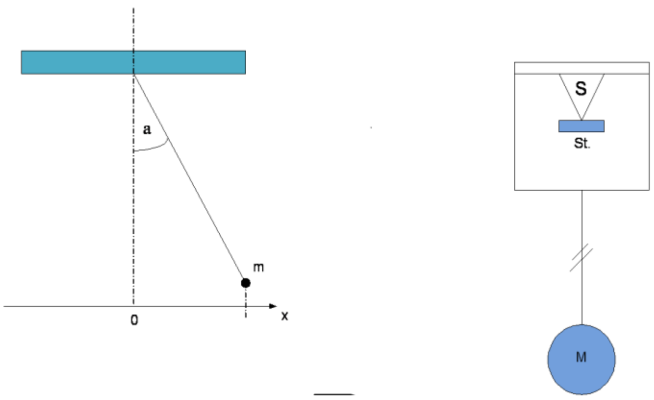

Fig. 1 : Links: massa (m) opgehangen aan een gewichtsloze en wrijvingsloze draad, slingerend in het gravitatieveld. Kleine uitwijkingen uit de evenwichtstoestand (x=0) zijn bij benadering gelijk aan de x-coördinaat : x(t). Rechts: slingerende massa (M) gedragen door een juk steunend op een draagvlak door middel van een "mes".

Fig. 1 links betreft een geïdealiseerde situatie die in de loop der jaren bij staande/hangende klokken en ook bij balansen benaderd is, meer bepaald door minimalisatie van de wrijving : dit wordt bereikt door gebruik van een "mes" vervaardigd uit hard metaal of edelsteen : dit laat toe het contact oppervlak zo klein mogelijk te maken: bij de studie van wrijvingskrachten leert men immers dat die wrijvingskrachten proportioneel zijn met de grootte van het contact oppervlak.

Andere toepassingen hiervan vindt men in de constructie van polsuurwerken ("jewels" – lagers vervaardigd uit industriële diamant) en – zij het enigszins andere vorm – in het gebruik van kogellagers.

De slingerbeweging in een dergelijk geïdealiseerd systeem - zoals dat voorgesteld in Fig. 1 - kan dan worden onderzocht op grond van behoud van mechanische energie zoals hierna verduidelijkt. Voorafgaand dient evenwel de exacte betekenis van een paar begrippen verduidelijkt:

1. De **kinetische energie (U_k):** dit is de energie die een voorwerp bezit uit hoofde van zijn massa (m) en zijn snelheid (v). Het is in feite de arbeid die een uitwendige krachtbron moet leveren om het voorwerp te versnellen van uit rust (begin snelheid) tot de eindsnelheid (v) . Op grond van de wet van Newton bekomt men inzake de daartoe vereiste kracht F_u :

$$F_u = m \,.\, a = m \,.\, \frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

De verplaatsing (x) voldoet verder aan : $dx = v \,.\, dt$ (2)

Zodat

$$dU_k = F_u \,.\, dx = m \,.\, \frac{dv}{dt} \,.\, v \,.\, dt = m \,.\, v \,.\, dv \qquad (3)$$

De kinetische energie (U_k) is dus de som/integraal van dergelijke bijdragen dU_k tussen de voorkomende snelheidsgrenzen (0, v) m.a.w. :

$$U_k = m\int_0^V v \,.\, dv = \frac{m\,v^2}{2} \qquad (4)$$

2. De **potentiele energie (U_p) (mogelijks terug winbaar ….)** is de arbeid te leveren door een uitwendige krachtbron om een voorwerp van uit een referentie positie in een welbepaalde (andere) positie te brengen.

   In een context van elastische krachten is U_p gekend op basis van de wet van Hooke. Deze (empirische) wet leert dat de (uitwendige) kracht $F_u(x)$ vereist om een elastisch voorwerp uit zijn evenwichtstoestand (x = 0) te verplaatsen over een afstand x , proportioneel is met die verplaatsing :

$$F_u(x) = k \cdot x \qquad (5)$$

waarin k de z.g. **veerconstante** voorstelt. De potentiele energie van de massa verplaatst over een afstand x is dan per definitie het product van dergelijke verplaatsingen (dx) met de kracht die daarvoor vereist is, gesommeerd over de totale verplaatsing :

$$U_p = \int_0^x k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (6)$$

2. HET MATHEMATISCH MODEL.

De wet van behoud van mechanische energie kan op grond van het voorgaande in deze context worden samengevat als:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = \text{const.} \qquad (7)$$

Voor de tijdsafgeleide van (7) bekomt men aldus:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,x^2\right) = 0 \quad \text{of} \quad m\,.\,v\,.\,\frac{dv}{dt} + k\,.\,x\,.\,\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (8)$$

Daar per definitie $v = \frac{dx}{dt}$ en $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

volgt hieruit de z.g. **bewegingsvergelijking**, i.e. een formulering van de wet van Newton :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,.\,x \quad \text{of} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,.\,x \qquad (9)$$

Deze betrekking leert dat de verplaatsing x(t) als tijdsfunctie moet voldoen aan de vereiste dat de tweede afgeleide op een constante na gelijk is aan de functie zelf. Bovendien dient die functie ook nog periodiek te zijn. Om die redenen kan enkel een sinusoïde en/of cosinusoïde voldoen, vandaar dat men stelt :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (10)$$

met X_m : amplitude; ω : pulsatie, ϕ fase-constante. Met het oog op het invoeren van (10) in (9) bekomt men dan achtereenvolgens:

$$\frac{dx}{dt} = \omega X_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (11)$$

En :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 X_m \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 . x(t) \qquad (12)$$

waaruit, op grond van (9) :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{of} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (13)$$

waar T de slingerperiode voorstelt.

Volledigheidshalve bepalen we nu ook nog de constante k voor de slinger in Fig.1. In Fig. 2 is die figuur vervolledigd met aanduiding van de krachten aanwezig op de slingerende massa en die zodoende de "terugroepende" kracht $F_{res.}$ bewerkstelligen. Aan de hand van die figuur merken we op dat vermits de hoek α en de uitwijking x klein zijn, geldt dat :

$$\sin\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{x}{L} \qquad (14)$$

waar L de lengte van de ophangdraad voorstelt, en waar de hoek a uitgedrukt is in radialen.

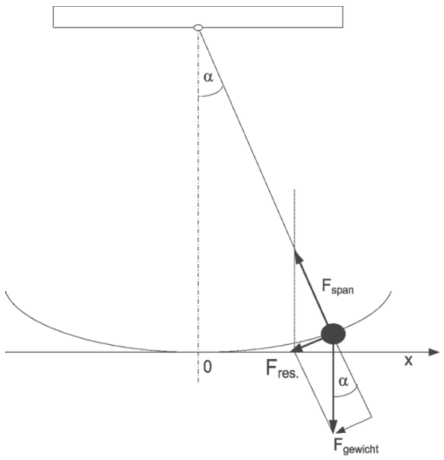

Fig. 2: Kleine verplaatsingen uit de evenwichtstoestand (de booglengte afgesneden op de kogelbaan) zijn bij benadering gelijk aan de x-coördinaat van de massa m. De resulterende kracht is dan parallel met de x as. Verder bemerken we dat de resulterende kracht $F_{res.}$ (de "terugroepende kracht") te vinden is als :

$$F_{res.} = -m . g . \sin\alpha \simeq -m . g . \frac{x}{L} \qquad (15)$$

Hierbij bemerkt men dat de resulterende kracht tegengesteld gericht is aan de verplaatsing. Na vergelijking met het eerder resultaat in (9) volgt inzake de gezochte constante k en de slingerperiode: $k = \frac{mg}{L}$ en dat $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$ (16)

Dit is precies het verband waarop het functioneren van verschillende types van uurwerken en hun afregeling is gebaseerd. Aan de hand van ditzelfde verband blijkt dan ook de mogelijkheid om de verandering van de gravitatieversnelling te onderzoeken, op grond van metingen van de periode T.

3. VERDERE **SULTATEN**

a. De Gedempte Trilling

In het voorgaande is aangetoond dat de wet van behoud van energie en de wet van Newton beide leiden tot het formuleren van de z.g. "bewegingsvergelijking" , i.e. vgl. 9., en dat op grond van die vergelijking relevante informatie bekomen wordt inzake de krachtconstante (k) en de periode (T) van de "ideale/mathematische" slinger (vgl. 16).

Van groot belang is het feit dat inzake "niet-ideale slingers", m.a.w. inzake reële massa - veer systemen, op grond van dezelfde bewegingsvergelijking opnieuw de gezochte informatie bekomen wordt. Zo luidt de bewegingsvergelijking (i.e. de wet van Newton) voor een gedempte trilling zoals die voorkomt bij aanwezigheid van wrijvingskracht:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \tag{17}$$

waarin de term $-b\frac{dx}{dt}$ de wrijvingskracht voorstelt, tegengesteld aan de snelheid.

In dit geval verwachten we een oplossing voor x(t) van de gedaante :

$$x(t) = X_m e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega' t + \varphi) \tag{18}$$

waarin de exponentiele term de demping in rekening brengt (Fig. 3).

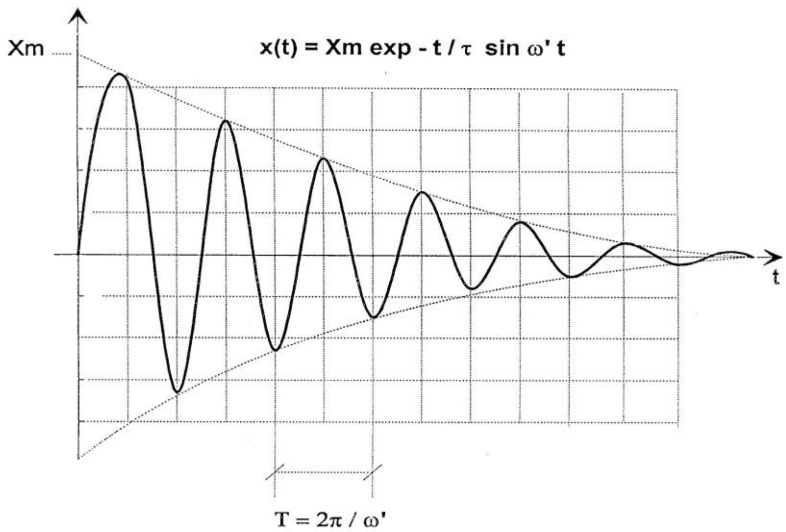

Fig. 3: Gedempte trilling x(t). De pulsatie ω' is kleiner (periode T is groter) dan in het geval van de niet gedempte trilling (zie vgl. 19 hierna). De tijdsconstante voldoet aan $\tau = b/2m$.

Net zoals in het voorgaande (vgl. 11, 12 en 13) kan met de voorgestelde oplossing (vgl. 18) inbrengen in vgl. 17, om na enig rekenwerk het volgende resultaat te bekomen, analoog met vgl. 17 :

$$\omega' = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]} \qquad (19)$$

Deze analyse van de gedempte trilling kent tal van toepassingen in huishoudelijke apparatuur, o.m. in het functioneren van balansen en in de beoordeling van de staat van de vering van motor voertuigen (k : veerkracht; b : staat v.d. schokdempers).

a) De Gedwongen Trilling.

Onderhouden en/of gedwongen trillingen treden op wanneer een uitwendige periodieke kracht F(t) de energieverliezen ingevolge wrijving compenseert en zodoende een trilling veroorzaakt met constante amplitude. De pulsatie (ω''), de amplitude (F_m) en de fase van de uitwendige kracht zijn vrij te kiezen, zodat de bewegingsvergelijking (i.e. de wet van Newton) te noteren is als :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \sin\omega'' t \qquad (20)$$

waar in het rechter lid van de vgl. de terugroepende kracht, respectievelijk de wrijvingskracht en de pulserende kracht te herkennen zijn.

De verplaatsing x(t) is zoals verwacht proportioneel met de grootte (F_m) van de drijvende kracht en synchroon hiermee :

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega''t - \delta) \tag{21}$$

waar de grootheid G vereist is voor dimensie aanpassing en waar de fase constante δ ermee rekening houdt dat de verplaatsing x(t) en de drijvende kracht een fase verschil kunnen vertonen (start-tijdstip..).

Het verder verloop van de analyse is precies zoals in de voorgaande gevallen : de voorgestelde oplossing (vgl. 21) wordt ingevoerd in de bewegingsvergelijking, waarbij na enig rekenwerk volgende betrekking inzake de grootheid G bekomen wordt :

$$G = \left[m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2 \right]^{1/2} \tag{22}$$

Belangrijk in dit verband is dat in deze betrekking het symbool ω de pulsatie van de ongedempte trilling voorstelt. Meer nog : in die gevallen waar de demping gering is (i.e. bij kleine b-waarden) neemt de grootheid G en de noemer in het rechter lid van vgl. 21 zeer kleine waarden aan zodra ω'' de pulsatie ω benadert : in die omstandigheden wordt de amplitude van de gedwongen trilling zeer groot en is er sprake van **resonantie**.

De wijze/mate waarop de amplitude van de gedwongen trilling afhangt van de pulsatie en van de grootte van de wrijving is op grond van vgl. 21 en vgl. 22 te berekenen, b.v. voor verschillende waarden van de wrijvingscoëfficiënt (b) : zodoende bekomt men de “frequency response” (Fig. 4) van het systeem.

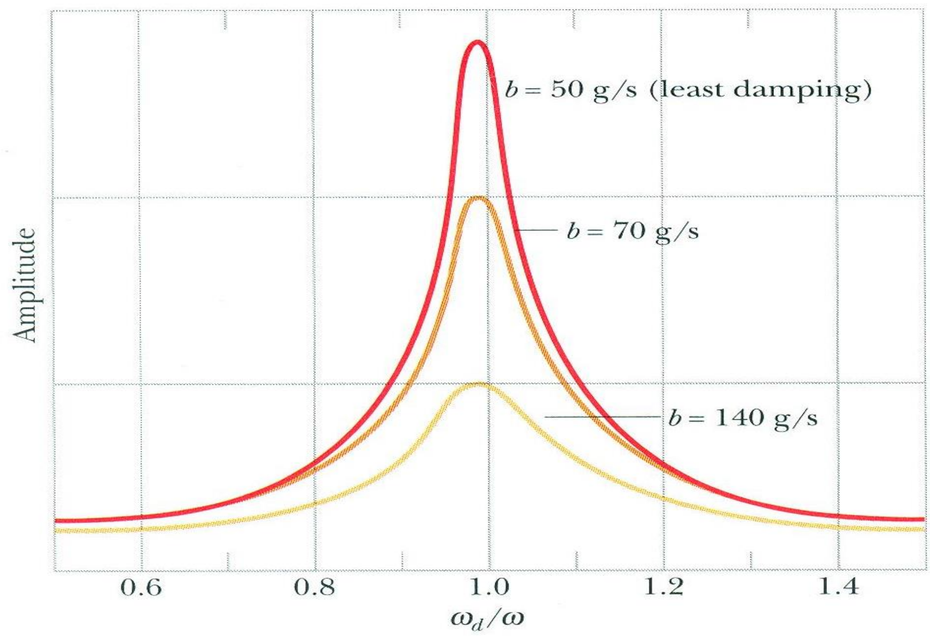

Fig. 4: Trilling amplitude als functie van de pulsatie ω_d van de drijvende kracht in verhouding tot de pulsatie van de ongedempte trilling, voor verschillende waarden van de demping coëfficiënt (b) (cfr. Fundamentals of Physics, Halliday & Resnick & Walker, 5th. Ed.pp. 387-388, ISBN 0-471-105597-7) .

Het resultaat voorgesteld in Fig. 4 komt de electronicus bekend voor : deze informatie en het bovenstaande was wel degelijk de aanloop tot een gelijkaardige analyse van elektrische trillingskringen, met finaal de formulering van begrippen zoals de “kwaliteitsfactor” van die kringen als resultaat.

Finale opmerking: het bovenstaande heeft niets te maken met het resonantie verschijnsel in gespannen kabels, touwen, snaren … en evenmin met resonantie van luchttrillingen, waarbij (in beide gevallen) het voorplantingsmedium van golfverschijnselen een belangrijke rol speelt.

================================